CLASE 3. Integrales de Superficie de Funciones Vectoriales

Consideremos una superficie S parametrizada por una función (de clase $\mathcal{C}^1$ e inyectiva) $\phi : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, con $\phi(\mathcal{D}) = S$ y $\phi(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$. Sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial (continuo) definido en S.

Definición 3.1 (Integral de Campos Vectoriales con parametrización ϕ)**.** La integral de superficie del campo $\mathbf{F}$ sobre la superficie parametrizada $S = \phi(\mathcal{D})$, denotada $\displaystyle\iint_{\phi} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$, se define por

$$\iint_{\phi} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \iint_{\mathcal{D}} \mathbf{F}(\phi(u,v)) \cdot (\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v)\ \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

De nuevo, $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v$ denota el Producto Vectorial Fundamental asociado a ϕ. Enfatizamos el uso de ϕ en esta definición en lugar de S puesto que el uso de otra parametrización de la misma superficie S puede arrojar otro resultado.

Definición 3.2 (Superficie Orientada)**.** Intuitivamente, una superficie orientable S es una superficie con 2 lados (o caras) *perfectamente diferenciados*, uno de ellos usualmente llamado *lado exterior* (o *cara positiva*) y el otro, *lado interior* (o *cara negativa*). El "perfectamente diferenciados" se puede entender así: En cada punto de cualquier superficie orientable existen 2 vectores normales unitarios (*parados* en los puntos de S, es decir, que parten (se originan) de la superficie S y se alejan de ella en dirección normal) $\boldsymbol{\eta}_1$ y $\boldsymbol{\eta}_2$ tales que al describir, el punto inicial de $\boldsymbol{\eta}_2$, una curva cerrada en S y regresar a su punto inicial se obtiene el vector $\boldsymbol{\eta}_2$; y al girar (el punto inicial de) $\boldsymbol{\eta}_1$ sobre una curva cerrada en S y regresar a su punto inicial se obtiene $\boldsymbol{\eta}_1$. En cada punto $(x,y,z) \in S$ los dos vectores satisfacen $\boldsymbol{\eta}_2 = -\boldsymbol{\eta}_1$. Cada una de estos dos *campos vectoriales normales unitarios* se puede asociar con un *lado* de la superficie: El lado (o cara) de la superficie (orientable) correspondiente a un campo vectorial normal unitario $\boldsymbol{\eta}$ (ya sabemos hay sólo dos tales campos) es aquella que *da* hacia el punto final de $\boldsymbol{\eta}$. En otras palabras, la cara (de una superficie orientable) asociada al campo vectorial normal unitario dado por $\boldsymbol{\eta}_1$ (respectivamente $\boldsymbol{\eta}_2$) es aquella que podría verse desde el extremo final de $\boldsymbol{\eta}_1$ ($\boldsymbol{\eta}_2$, respectivamente) cuando se mira hacia S (ver Figura 1).

El acto de *escoger*[1] una de las 2 *caras* o *lados* o, equivalentemente, escoger uno de los 2 *campos vectoriales normales unitarios* es lo que se conoce como orientar una superficie (orientable, claro

[1] Resulta que para, incluso, definir la integral de superficie de un campo vectorial (que es nuestra meta inme-

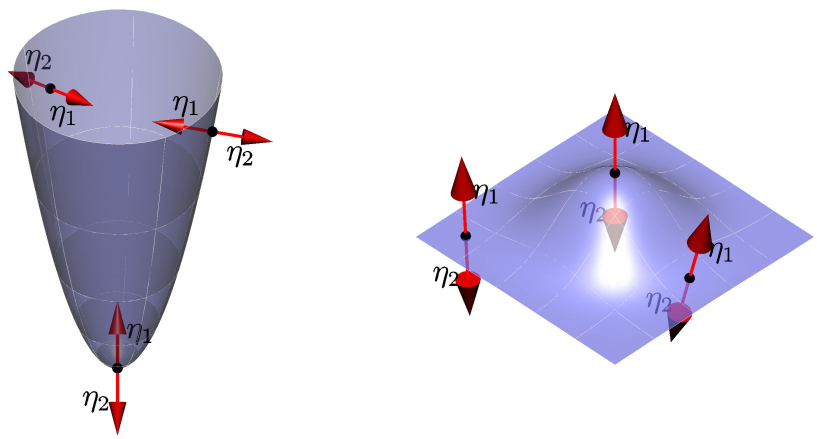

Figura 1: Dos Ejemplos de Superficies Orientables.

está). En otras palabras, una superficie orientada es una superficie orientable a la que se le ha *escogido* uno de sus campos vectoriales normales unitarios (es común llamar "positivo" a la *orientación* escogida y "negativa" a la otra).

La superficie es no orientable cuando al describir $\boldsymbol{\eta}_2$ (o $\boldsymbol{\eta}_1$) una curva cerrada en S y regresar a su punto de partida, se obtiene el vector $\boldsymbol{\eta}_1$ ($\boldsymbol{\eta}_2$). Un ejemplo de una superficie no orientable es la llamada *cinta (o banda) de Möbius* (ver Figura 2).

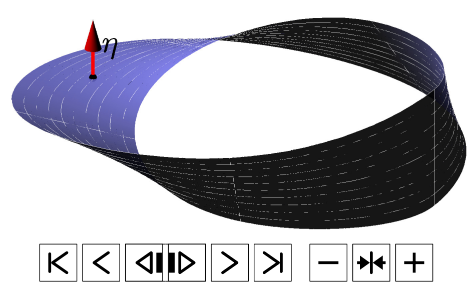

Figura 2: Banda (o cinta) de Möbius.

Si $\phi : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es una parametrización de una *superficie orientada* S, suave en $\phi(u_0, v_0) \in \mathcal{D}$, entonces está perfectamente definido el vector normal (en $\phi(u_0, v_0)$) unitario dado por

$$\frac{\mathbf{T}_{u_0} \times \mathbf{T}_{v_0}}{\|\mathbf{T}_{u_0} \times \mathbf{T}_{v_0}\|}.$$

diata) es necesario escoger con cual de las dos orientaciones posibles de la superficie se trabajará.

Si $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}(\phi(u_0, v_0))$ es el vector normal unitario a S en $\phi(u_0, v_0)$ correspondiente al *lado* (o *cara*) elegido *positivo* de S entonces se tiene

$$\frac{\mathbf{T}_{u_0} \times \mathbf{T}_{v_0}}{\|\mathbf{T}_{u_0} \times \mathbf{T}_{v_0}\|} = \boldsymbol{\eta} \qquad \text{ó} \qquad \frac{\mathbf{T}_{u_0} \times \mathbf{T}_{v_0}}{\|\mathbf{T}_{u_0} \times \mathbf{T}_{v_0}\|} = -\boldsymbol{\eta}.$$

Definición 3.3 (Conservar, Preservar ó Invertir la Orientación)**.** Se dice que la parametrización ϕ preserva la orientación (de la superficie *orientada* S) si $\dfrac{\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v}{\|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\|} = \boldsymbol{\eta}$ en todo punto (u, v) de $\mathcal{D}$. En caso contrario[2], es decir, si $\dfrac{\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v}{\|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\|} = -\boldsymbol{\eta}$ (en cada punto (u, v) de S) se dirá que ϕ invierte la orientación (de S).

Teorema 3.4. *Sea S una superficie orientada y sean ϕ_1 y ϕ_2 dos parametrizaciones suaves*[3] *de S. Sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial continuo definido en S y sea f, $f : S \to \mathbb{R}$, un campo escalar continuo en S. Entonces*

(i) Si ϕ_1 y ϕ_2 preservan la orientación (de S) será $\displaystyle\iint_{\phi_1} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \iint_{\phi_2} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$.

(ii) Si una de las parametrizaciones preserva la orientación y la otra la invierte entonces se cumple $\displaystyle\iint_{\phi_1} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = -\iint_{\phi_2} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$.

(iii) $\displaystyle\iint_{\phi_1} f \, \mathrm{d}s = \iint_{\phi_2} f \, \mathrm{d}s$*. En particular, el área (de una superficie parametrizada) es independiente de la parametrización:* $\displaystyle\operatorname{Area}(S) = \iint_{\phi_1} \mathrm{d}s = \iint_{\phi_2} \mathrm{d}s$*, tomando* $f \equiv 1$.

Prueba. La demostración se puede hacer usando la fórmula del cambio de variables para integrales dobles. □

El teorema anterior nos permite hacer la siguiente definición de *integral de superficie para campos vectoriales*:

Definición 3.5 (Integral de Superficie para Campos Vectoriales)**.** Dada una superficie parametrizada suave S orientada y una función continua $\mathbf{F} : S \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definimos la integral de

[2] Nota: Si S es una superficie parametrizada por ϕ, suave, orientable, siendo ϕ una función de clase $\mathcal{C}^1$ entonces si en *algún punto* $(u_0, v_0) \in S$ se cumple que $\frac{\mathbf{T}_{u_0} \times \mathbf{T}_{v_0}}{\|\mathbf{T}_{u_0} \times \mathbf{T}_{v_0}\|} = \boldsymbol{\eta}_1$ (ó $\boldsymbol{\eta}_2$) entonces la igualdad se mantiene en *todos los puntos* (u, v) de S.

[3] No confundir *función suave* con *superficie suave*.

superficie de $\mathbf{F}$ sobre S, denotada $\displaystyle\iint_S \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$, como

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \iint_\phi \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S},$$

siendo $\phi : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una (*cualquiera*) parametrización de S que preserve la orientación (el significado de este término fue dado en la Definición 3.3).

Teorema 3.6. *Sea S una superficie parametrizada suave orientada con (mediante) vector normal unitario $\boldsymbol{\eta}$. Sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial (continuo) definido en S, entonces*

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \iint_S (\mathbf{F}\cdot\boldsymbol{\eta})\ \mathrm{d}s.$$

Prueba. Si ϕ es una parametrización de S que *preserva* la orientación, entonces $\boldsymbol{\eta} = \dfrac{\mathbf{T}_u\times\mathbf{T}_v}{\|\mathbf{T}_u\times\mathbf{T}_v\|}$ en cada punto de S. Luego

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} &= \iint_\phi \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \iint_{\mathcal{D}} \mathbf{F}\cdot(\mathbf{T}_u\times\mathbf{T}_v)\ \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\ &= \iint_{\mathcal{D}} \mathbf{F}\cdot\left(\frac{\mathbf{T}_u\times\mathbf{T}_v}{\|\mathbf{T}_u\times\mathbf{T}_v\|}\right)\|\mathbf{T}_u\times\mathbf{T}_v\|\ \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \iint_{\mathcal{D}} (\mathbf{F}\cdot\boldsymbol{\eta})\,\|\mathbf{T}_u\times\mathbf{T}_v\|\ \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\ &= \iint_S (\mathbf{F}\cdot\boldsymbol{\eta})\ \mathrm{d}s.\end{aligned}$$

□

***Observación* 3.7.** Si consideramos a $\mathbf{F}(x,y,z)$ como el campo de velocidades de un fluido, $\mathbf{F}(x,y,z)$ apuntando en la dirección en la cual el fluido se mueve a través de la superficie cerca del punto (x,y,z), entonces $\displaystyle\iint_S \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$ representa la *cantidad neta de fluido que pasa a través de la superficie por unidad de tiempo*, es decir, la *razón o tasa de flujo*. Por esta razón, en ocasiones llamaremos a la integral $\displaystyle\iint_S \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$ el flujo de $\mathbf{F}$ a través de la superficie S.

El volumen del paralelepípedo mostrado en la Figura 3, es el valor absoluto del triple producto $\mathbf{F}\cdot(\mathbf{T}_u\times\mathbf{T}_v)$ y mide la cantidad de fluido que pasa a través del paralelogramo tangente por unidad de tiempo.

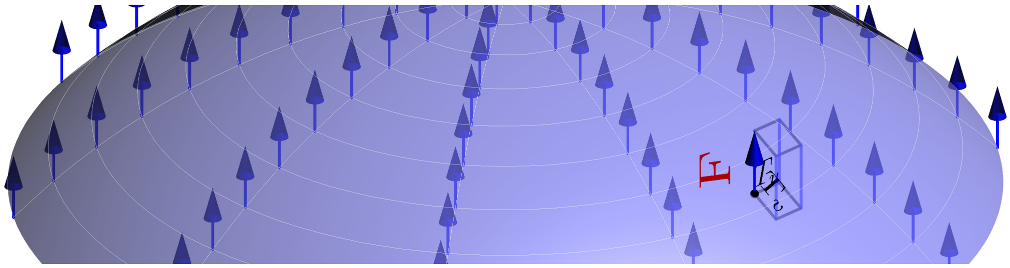

Figura 3: Flujo sobre una superficie.

Ejemplo 3.8. Consideremos las superficies

$$S_1 = \left\{ (x,y,z) : \ x^2 + y^2 + z^2 = 81, \ z \geq 0 \right\},$$
$$S_2 = \left\{ (x,y,z) : \ x^2 + y^2 \leq 81, \ z = 0 \right\}.$$

Sea $S = S_1 \cup S_2$, orientada con la normal exterior (a S). Calcule el flujo (total) del campo $\mathbf{F}$ definido por $\mathbf{F}(x,y,z) = (-y, x, z)$, a través de S.

Solución.

(a) Parametrizamos a S_1 mediante la parametrización usual para superficies de la forma $z = f(x,y)$ (siendo, en este caso, $f(x,y) = \sqrt{81 - x^2 - y^2}$), es decir,

$$\phi_1(x,y) = (x, y, \sqrt{81 - x^2 - y^2}), \quad \text{con} \quad \mathcal{D}_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leq 81\}.$$

Fácilmente obtenemos

$$\mathbf{T}_x \times \mathbf{T}_y = (-f_x\,,\ -f_y\,,\ 1) = \left(\frac{x}{\sqrt{81 - x^2 - y^2}}\,,\ \frac{y}{\sqrt{81 - x^2 - y^2}}\,,\ 1 \right).$$

Este vector normal *apunta hacia afuera* de S, así que ϕ conserva la orientación de S_1.

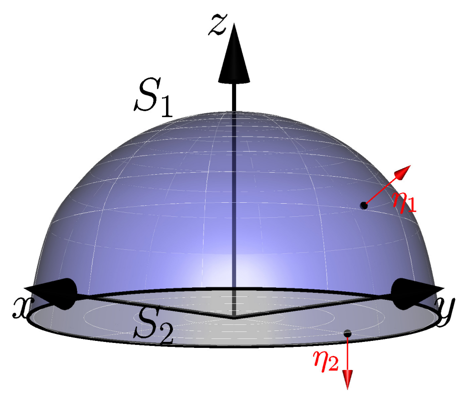

Figura 4: Orientación Exterior de $S = S_1 \cup S_2$.

Así,

$$\begin{aligned}
\text{Flujo}(S_1) &= \iint_{\phi_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \\
&= \iint_{\mathcal{D}_1} (-y, x, \sqrt{81 - x^2 - y^2}) \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{81 - x^2 - y^2}}, \frac{y}{\sqrt{81 - x^2 - y^2}}, 1 \right) \, dx\, dy \\
&= \iint_{\mathcal{D}_1} \sqrt{81 - x^2 - y^2} \, dx\, dy \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^9 \rho \sqrt{81 - \rho^2} \, d\rho\, d\theta = 486\pi.
\end{aligned}$$

(En la penúltima ecuación hemos hecho un cambio a coordenadas polares, esto es, $x = \rho\cos(\theta)$; $y = \rho\,\text{sen}(\theta)\ldots$).

(b) Parametrizamos S_2 con $z = g(x, y) = 0$ (el plano xy), es decir, $\phi_2(x, y) = (x, y, 0)$ (¿Puede decir quién es $\mathcal{D}_2$?). Entonces $\mathbf{T}_x \times \mathbf{T}_y = (-g_x\,, -g_y\,, 1) = (0, 0, 1)$. Así ϕ_2 invierte la orientación $\boldsymbol{\eta}_2$ (recuerde que S se orientó exteriormente). Luego,

$$\begin{aligned}
\text{Flujo}(S_2) &= -\iint_{\phi_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \\
&= -\iint_{\mathcal{D}_2} (-y, x, 0) \cdot (0, 0, 1) \, dx\, dy = 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\text{Flujo}(S) = \text{Flujo}(S_1) + \text{Flujo}(S_2) = 486\pi$.

Ejemplo 3.9. Considere el campo vectorial $\mathbf{F}$ dado por $\mathbf{F}(x,y,z) = \left(\frac{x}{r^3}, \frac{y}{r^3}, \frac{z}{r^3}\right)$, donde $r = r(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Sea S cualquier porción de la esfera $x^2+y^2+z^2 = 4$ orientada con la normal $\boldsymbol{\eta}$ exterior a la esfera. Demostrar que el flujo de $\mathbf{F}$ a través de S es proporcional al área de S, es decir, Flujo$(S) = k$ Area(S) (siendo k una constante real).

Solución. Calculando el gradiente de la función $\varphi(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-4$, se tiene que $\nabla\varphi = (2x, 2y, 2z)$. El vector normal (a S) unitario exterior es entonces $\frac{\nabla\varphi}{\|\nabla\varphi\|}$. Calculamos $\|\nabla\varphi\| = \sqrt{4x^2+4y^2+4z^2} = 2r$, y sobre la esfera que tiene radio 2 es $\|\nabla\varphi\| = 4$.

Así $\boldsymbol{\eta} = \dfrac{1}{4}(2x, 2y, 2z) = \left(\dfrac{x}{2}, \dfrac{y}{2}, \dfrac{z}{2}\right)$. Luego

$$\text{Flujo}(S) = \iint\limits_S \mathbf{F}(x,y,z)\cdot\boldsymbol{\eta}\ \mathrm{d}s = \iint\limits_S \left(\frac{x}{r^3}, \frac{y}{r^3}, \frac{z}{r^3}\right)\cdot\left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}, \frac{z}{2}\right)\mathrm{d}s.$$

Evaluando sobre la esfera de radio 2 es $r^3 = 8$, luego,

$$\text{Flujo}(S) = \iint\limits_S \frac{1}{16}(x,y,z)\cdot(x,y,z)\ \mathrm{d}s = \frac{1}{16}\iint\limits_S (x^2+y^2+z^2)\ \mathrm{d}s.$$

Pero en la esfera es $x^2+y^2+z^2 = 4$ y así

$$\text{Flujo}(S) = \frac{4}{16}\iint\limits_S \mathrm{d}s = \frac{1}{4}\,\text{Area}(S),$$

de donde $k = \frac{1}{4}$.